Exercice 1 (3 points) :

1 | 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : \quad z^2 - 8z + 17 = 0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les points A et B d'affixes respectives : $a = 4 + i$ et $b = 8 + 3i$. Soient z et z' les affixes respectives d'un point M et son image M' par la rotation R de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + 2i$ et d'angle $\frac{3\pi}{2}$

0,75 | a) Montrer que : $z' = -iz - 1 + 3i$

0,5 | b) Vérifier que l'affixe du point C, image de A par la rotation R, est : $c = -i$

0,75 | c) Montrer que : $b - c = 2(a - c)$. Puis , en déduire que les points A , B , C sont alignés

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan $(P) : \quad x + 2y + z - 1 = 0$ et la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0$

0,75 | 1) Justifier que le centre de la sphère (S) est I(2 , 3 , -1) et que son rayon est $R = 3$

0,5 | 2) a) Montrer que la distance du point I au plan (P) est égale à $\sqrt{6}$

0,75 | b) En déduire que (P) est (S) se coupent selon un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{3}$

0,5 | 3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par I(2 , 3 , -1) et orthogonale à (P)

0,5 | b) Montrer que le centre de cercle (Γ) est le point H(1 , 1 , -2)

Exercice 3 (3 points) :

Une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et sans remise trois boules de l'urne

1 | 1) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules blanches

1 | 2) Montrer que la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur est égale à $\frac{1}{7}$

1 | 3) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche

Exercice 4 (3 points) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3}$

1 | 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$

2) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

1 | a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{5}$, puis exprimer v_n en fonction de n

Exercice 1 (3 points) :

1 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : \quad z^2 - 8z + 17 = 0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$ les points A et B d'affixes respectives : $a = 4 + i$ et $b = 8 + 3i$. Soient z et z' les affixes respectives d'un point M et son image M' par la rotation R de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + 2i$ et d'angle $\frac{3\pi}{2}$

0,75 a) Montrer que : $z' = -iz - 1 + 3i$

0,5 b) Vérifier que l'affixe du point C, image de A par la rotation R, est : $c = -i$

0,75 c) Montrer que : $b - c = 2(a - c)$. Puis , en déduire que les points A , B , C sont alignés

Exercice 2 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan $(P) : \quad x + 2y + z - 1 = 0$ et la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0$

0,75 1) Justifier que le centre de la sphère (S) est I(2 , 3 , -1) et que son rayon est $R = 3$

0,5 2) a) Montrer que la distance du point I au plan (P) est égale à $\sqrt{6}$

0,75 b) En déduire que (P) est (S) se coupent selon un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{3}$

0,5 3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par I(2 , 3 , -1) et orthogonale à (P)

0,5 b) Montrer que le centre de cercle (Γ) est le point H(1 , 1 , -2)

Exercice 3 (3 points) :

Une urne contient quatre boules blanches et trois boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard, successivement et sans remise trois boules de l'urne

1 1) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules blanches

1 2) Montrer que la probabilité d'obtenir 3 boules de même couleur est égale à $\frac{1}{7}$

1 3) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche

Exercice 4 (3 points) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3}$

1 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$

2) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

1 a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{5}$, puis exprimer v_n en fonction de n

1 b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$, puis calculer $\lim_{n \to +\infty} u_n$